CHƯƠNG 2

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

§1 ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Tuần 6: Từ 11/10-16/10/2021

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

① Để biểu diễn một mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc. Kí hiệu mặt phẳng: dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc đơn. Ví dụ: mặt phẳng (P), mặt phẳng (α) hoặc viết tắt là mp(P), mp(α) hoặc (P), (α), ...

② Điểm A thuộc mặt phẳng (P) kí hiệu là $A \in (P)$.

Điểm B không thuộc mặt phẳng (P) kí hiệu là $B \notin (P)$.

③ Qui tắc vẽ hình không gian:

- Hai đường song song vẽ thành hai đường song song; hai đường cắt nhau vẽ thành hai đường cắt nhau.
- Giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét liền để vẽ đường nhìn thấy; dùng nét đứt để vẽ đường bị che khuất.

2 CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Tính chất 6. Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3 CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Có ba cách xác định một mặt phẳng:

1. đi qua ba điểm không thẳng hàng.
2. đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
3. chứa hai đường thẳng cắt nhau.

4 HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Trong mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S ở ngoài (α) và nối S với tất cả các đỉnh của đa giác $A_1A_2...A_n$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, $\ldots$, SA_nA_1 gọi là hình chóp và kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.
2. Hình chóp tam giác $S.ABC$ còn gọi là tứ diện $SABC$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt (P), (Q) ta đi tìm hai điểm phân biệt A, B thuộc cả hai mặt phẳng đó.

VÍ DỤ MẪU DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có cặp cạnh đối AB, CD không song song với nhau và S là điểm không nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases}$ (1)

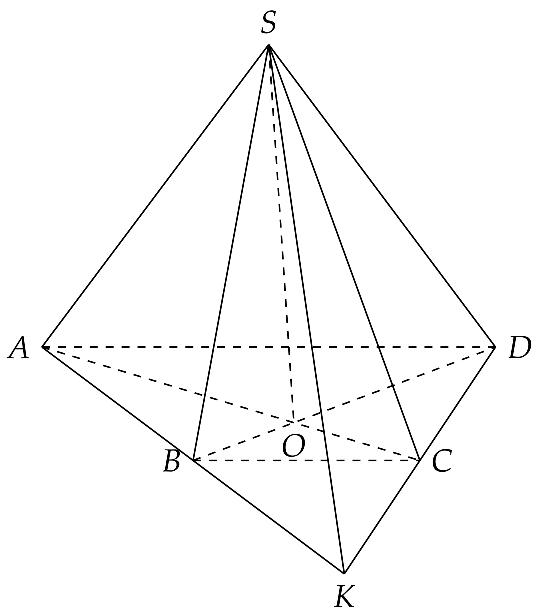
Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó do $O \in BD$ nên $O \in (SBD)$. Tương tự ta có $O \in (SAC)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Gọi K là giao điểm của AB và CD, khi đó ta có $\begin{cases} K \in (SAB) \\ K \in (SCD) \end{cases}$. (3)

Mặt khác $\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{cases}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



□

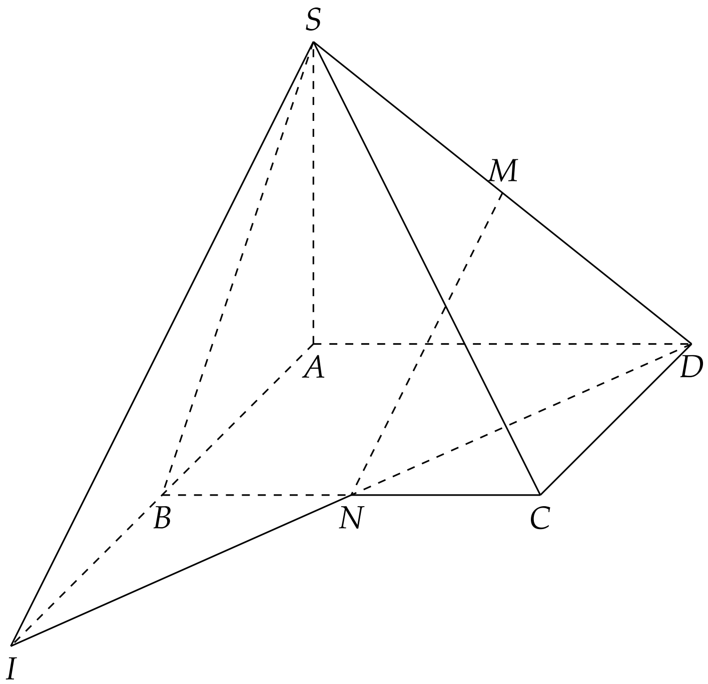
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD và BC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (DMN) và (SAB).

Lời giải.

Ta có $S \in DM \Rightarrow S \in (DMN)$, từ đó suy ra $S \in (DMN) \cap (SAB)$ (1)

Gọi I là giao điểm của DN và AB, khi đó do $I \in DM$ nên $I \in (DMN)$. Tương tự ta có $I \in (SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (SAB).



□

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC nhưng không trùng với các đầu mút của các đoạn thẳng ấy. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta có:

$I \in AD \Rightarrow I \in (KAD) \Rightarrow I \in (KAD) \cap (IBC)$. (1)

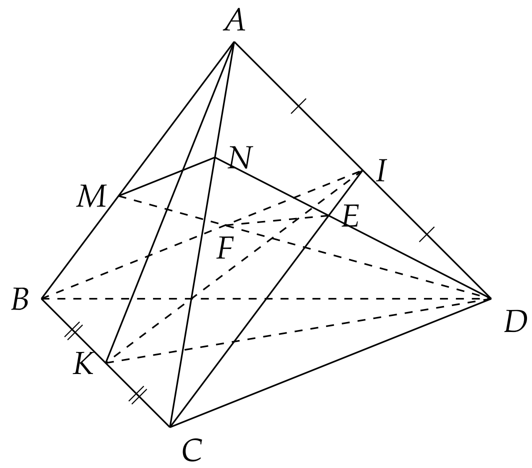
$K \in BC \Rightarrow K \in (IBC) \Rightarrow K \in (KAD) \cap (IBC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IK là giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi E là giao điểm của các đường thẳng CI và DN, khi đó $\begin{cases} E \in (IBC) \\ E \in (DMN) \end{cases}$. (3)

Gọi F là giao điểm của các đường thẳng BI và DM, khi đó $\begin{cases} F \in (IBC) \\ F \in (DMN) \end{cases}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

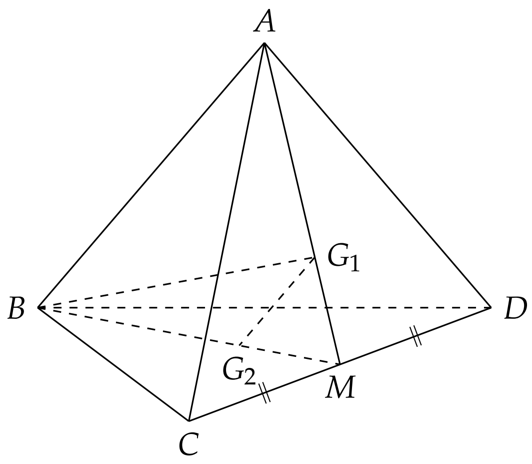


□

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng AG_1 là giao tuyến của các mặt phẳng (BG_1G_2) và (ACD).

Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD, khi đó $G_2 \in BM$ hay $M \in (BG_1G_2)$. Từ đó suy ra $M \in (ACD) \cap (BG_1G_2)$. (1)
Hiển nhiên $G_1 \in (ACD) \cap (BG_1G_2)$. (2)
Từ đó suy ra MG_1 là giao tuyến của các mặt phẳng (BG_1G_2) và (ACD).
Mặt khác do G_1 là trọng tâm của tam giác ACD nên $G_1 \in AM$, từ đó suy ra AG_1 là giao tuyến của các mặt phẳng (BG_1G_2) và (ACD).



□

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC. N là điểm trên cạnh SB sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng
a) $(ABCD)$.
b) (SAD).
c) (SCD).

Lời giải.

a) Gọi I là giao điểm của MN và AB, khi đó ta có $\begin{cases} I \in MN \\ I \in AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (MNP) \\ I \in (ABCD) \end{cases}$. (1)

Hiển nhiên $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in (ABCD) \end{cases}$. (2)

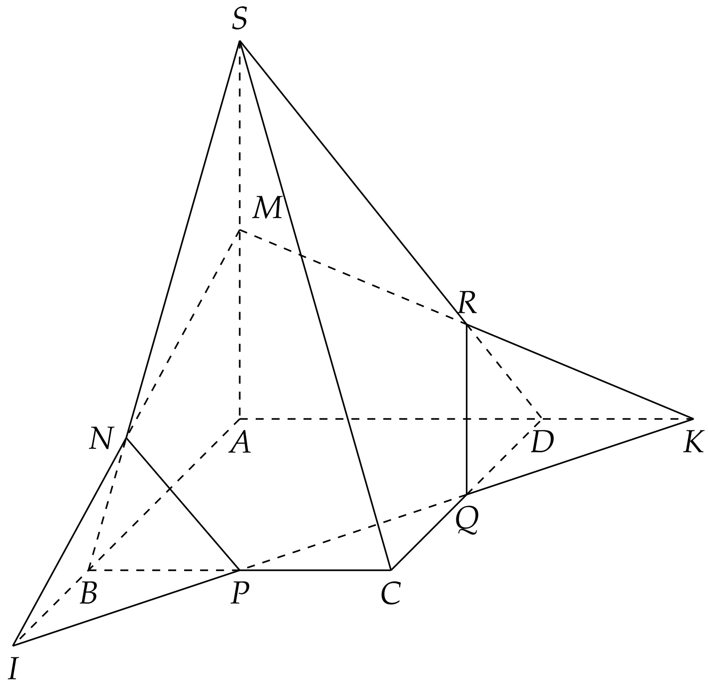
Từ (1) và (2) suy ra PI là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

b) Gọi K là giao điểm của IP với AD, khi đó $\begin{cases} K \in IP \\ K \in AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (SAD) \end{cases}$. (3)

Hiển nhiên $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in (ABCD) \end{cases}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra MK là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

c) Gọi Q là giao điểm của IP và CD, R là giao điểm của MK và SD. Khi đó ta chứng minh được QR là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và (SCD).



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, AB cắt CD tại E và AC cắt BD tại F. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SEF) với các mặt phẳng (SAD), (SBC).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ và E là một điểm trên cạnh SC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAE) và (SBD).

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm lần lượt nằm trong các tam giác ABC và ACD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (AMN) và (BCD).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là điểm bất kỳ trên cạnh SD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (MAC).

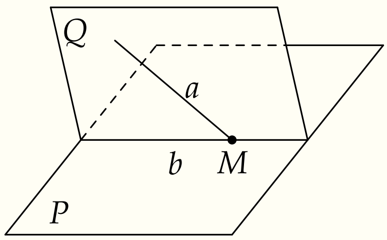
Bài 5. Cho bốn điểm A, B, C, D không thuộc cùng một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (BCD) và (ACD).

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO, (M không trùng với A và O). Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với mặt phẳng (ABC).

Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng a và mặt phẳng (P), ta tìm giao điểm của a và một đường thẳng b nằm trong (P).

$a \cap b = M$ và $b \subset (P)$.
Suy ra $M = a \cap (P)$.

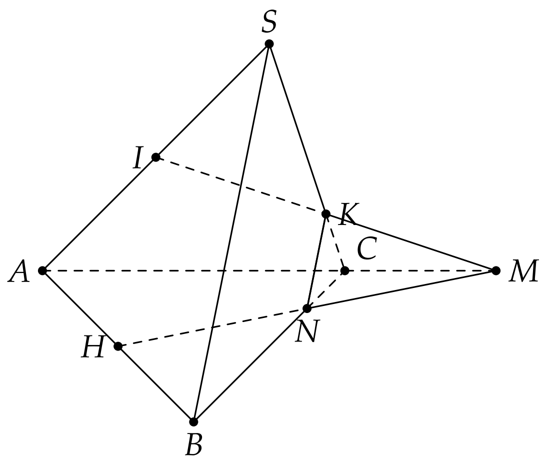


Phương pháp:
- Bước 1: Xác định mặt phẳng (Q) chứa a.
- Bước 2: Tìm giao tuyến $b = (P) \cap (Q)$.
- Bước 3: Gọi $M = a \cap b$. Suy ra $M = a \cap (P)$.

VÍ DỤ MẪU DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I là trung điểm của cạnh SA, H là trung điểm của cạnh AB, K là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 4KC$.
a) Tìm giao điểm M của IK và mặt phẳng (ABC).
b) Tìm giao điểm N của HM và mặt phẳng (SBC).

Lời giải.
a) Gọi $M = IK \cap AC$. Ta có: $M \in IK$ và $M \in AC \subset (ABC)$. Suy ra $M = IK \cap (ABC)$.
b) Gọi $N = HM \cap BC$. Ta có: $N \in HM$ và $N \in BC \subset (SBC)$. Suy ra $N = HM \cap (SBC)$.



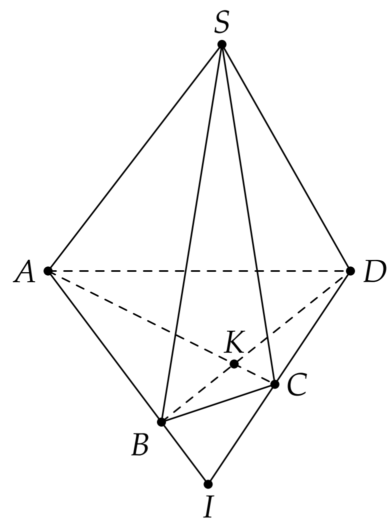
□

Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác lồi $S.ABCD$, có AB và CD không song song.

a) Tìm giao điểm của AB và mặt phẳng (SCD).
b) Tìm giao điểm của AC và mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

a) Gọi $I = AB \cap CD$. Ta có: $I \in AB$ và $I \in CD \subset (SCD)$. Suy ra $I = AB \cap (SCD)$.
b) Gọi $K = AC \cap BD$. Ta có: $K \in AC$ và $K \in BD \subset (SBD)$. Suy ra $K = AC \cap (SBD)$.

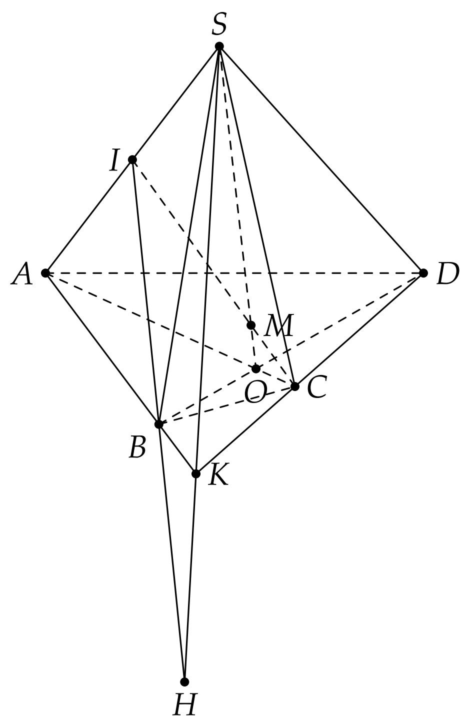


□

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác lồi $S.ABCD$, có AB và CD không song song. Gọi I là trung điểm của cạnh SA.
a) Tìm giao điểm của CI và mặt phẳng (SBD).
b) Tìm giao điểm của BI và mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

a) $CI \subset (SAC)$. Gọi $O = AC \cap BD$. Suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
Gọi $M = CI \cap SO$. Suy ra $M = CI \cap (SBD)$.
b) $BI \subset (SAB)$. Gọi $K = AB \cap CD$. Suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SK$.
Gọi $H = BI \cap SK$. Suy ra $H = BI \cap (SCD)$.

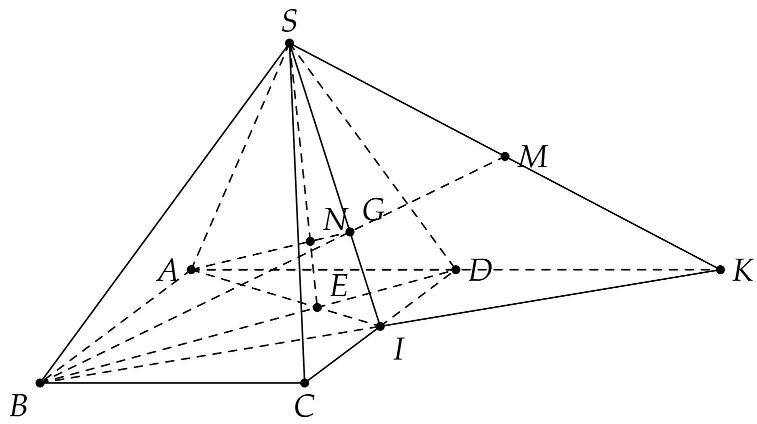


□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD.
a) Tìm giao điểm M của BG và mặt phẳng (SAD).
b) Tìm giao điểm N của AG và mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm của cạnh CD.Suy ra $BG \subset (SBI)$.
Gọi $K = BI \cap AD$. Suy ra $(SBI) \cap (SAD) = SK$.
Gọi $M = BG \cap SK$. Suy ra $M = BG \cap (SAD)$.
b) Ta có $AG \subset (SAI)$.
Gọi $E = AI \cap BD$. Suy ra $(SAI) \cap (SBD) = SE$.
Gọi $N = AG \cap SE$. Suy ra $N = AG \cap (SBD)$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang với AD và BC song song với nhau. Gọi I là trung điểm của cạnh SA, K là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 3KC$.
a) Tìm giao điểm M của IK và mặt phẳng $(ABCD)$.
b) Tìm giao điểm H của BM và mặt phẳng (SAD).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm trên cạnh CD sao cho $DI = \frac{3}{4}DC$.
a) Tìm giao điểm của OI và mặt phẳng (SBC).
b) Tìm giao điểm của OI và mặt phẳng (SAB).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, D là trung điểm của đoạn thẳng SG.
a) Tìm giao điểm I của BG và mặt phẳng (SAC).
b) Tìm giao điểm của BD và mặt phẳng (SAC).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang với AD và BC song song với nhau. Gọi E là trung điểm của cạnh CD.
a) Tìm giao điểm của BE và mặt phẳng (SAD).
b) Tìm giao điểm của AE và mặt phẳng (SBD).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi D là điểm thuộc miền trong của tam giác SBC, E là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tìm giao điểm M của AD và mặt phẳng (SBE).

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác lồi $S.ABCD$, có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.
a) Tìm giao điểm I của CD và mặt phẳng (ABM).
b) Tìm giao điểm K của SD và mặt phẳng (ABM).

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A', B', C' là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh SA, SB, SC sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA, SB' = \frac{1}{2}SB, SC' = \frac{1}{2}SC$.
a) Tìm giao điểm E, F của các đường thẳng $A'B'$, $A'C'$ lần lượt với mặt phẳng (ABC).
b) Gọi I và J lần lượt là các điểm đối xứng của A' qua B' và C'. Chứng minh rằng $IJ = BC$ và $BI = CJ$.
c) Chứng minh rằng BC là đường trung bình của tam giác AEF.

Dạng 3. Xác định thiết diện

∗Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình H là đa giác nằm trong mặt phẳng (P), có các cạnh là giao tuyến của (P) với các mặt của hình H, có các đỉnh là giao điểm của mặt phẳng (P) với cách cạnh của hình H. Hay đơn giản hơn:
Thiết diện của hình H cắt bởi $mp(P)$ là phần chung của hình H và $mp(P)$
∗Muốn tìm thiết diện của một mặt phẳng và một hình cho trước, ta tìm giao của mặt phẳng cắt với từng cạnh của hình đó, sau đó nối lại. Ta có được thiết diện cần tìm.
∗ Lưu ý khi làm bài: dạng bài tìm thiết diện thực chất cũng là dạng bài tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Vì thế, để làm tốt dạng bài này cần phải nắm vững cách tìm giao tuyến. Chú ý khi làm cần dự đoán trước mặt phẳng cắt sẽ cắt ở đâu để dễ xác định.

VÍ DỤ MẪU DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. $K \in BD$ sao cho $BK = 3KD$, xác định thiết diện của (MNK) với tứ diện.

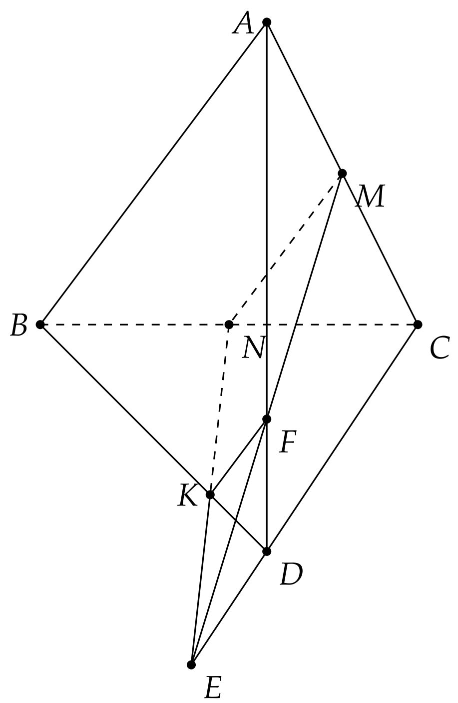
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M, N \in (MNK) \\ M, N \in (ABC) \\ M \neq N \end{cases} \Rightarrow (MNK) \cap (ABC) = MN$

Trong $mp(BDC)$, kẻ $NK \cap CD = E$. $E \in NK \Rightarrow E \in mp(MNK)$

Trong $mp(ACD)$, kẻ $ME \cap AD = F, F \in ME \Rightarrow F \in mp(MNK)$

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNKF$.

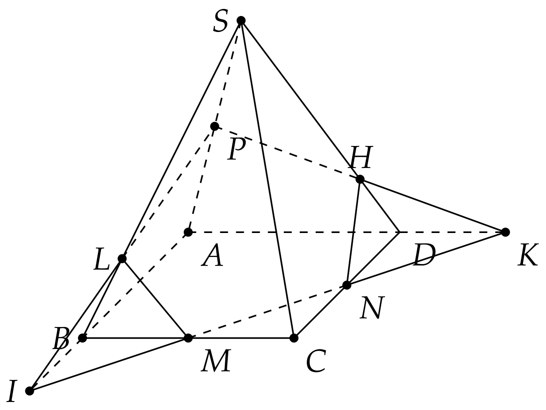


□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh CB, CD, SA. Tìm thiết diện tạo bởi $mp(MNP)$ và hình chóp.

Lời giải.

Trong $mp(ABC)$ kẻ $MN \cap AD = G, MN \cap AB = H \Rightarrow G, H \in mp(MNP)$
Trong $mp(SAD)$ kẻ $GP \cap SD = R \Rightarrow R \in mp(MNP)$
Trong $mp(SAB)$ kẻ $HP \cap SB = Q \Rightarrow Q \in mp(MNP)$
Ta có thiết diện $MNRPQ$.

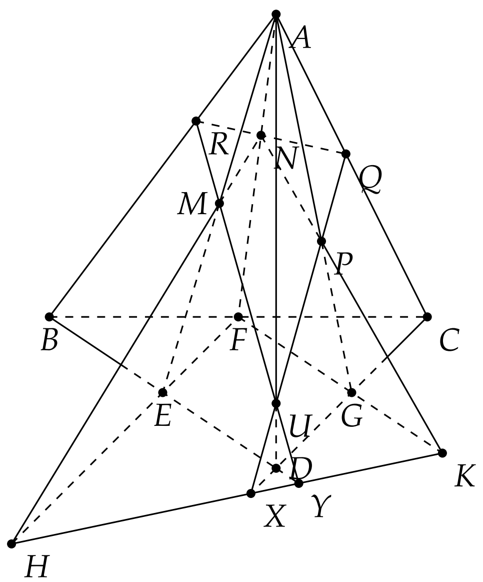


□

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh BD, BC, CD. Trên AE, AF, AG lấy các điểm M, N, P sao cho MN, MP, NP lần lượt không song với EF, EG, FG. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi $mp(MNP)$.

Lời giải.

Trong $mp(AEF), MN \cap EF = H$. Trong $mp(AFG), NP \cap FG = K$.
Ta có $H, K \in mp(MNP)$.
Trong $mp(ABC), HK \cap DC = X, HK \cap BD = Y \Rightarrow X, Y \in (MNP)$.
Trong $(ABD), MY \cap AD = U, MY \cap AB = R \Rightarrow U, R \in (MNP)$.
Trong $(ADC), XP \cap AC = Q \Rightarrow Q \in (MNP)$.
Nếu như hai điểm X, Y nằm trên hai đoạn thẳng BD, DC, thiết diện thu đuược là tứ giác $RQXY$
Nếu như hai điểm X, Y không nằm trên hai đoạn BD, DC, thiết diện thu được là tam giác QRU. Ở hình bên là thiết diện hình tam giác.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, trên SD lấy điểm N. Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi $mp(BCN)$.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên đoạn thẳng DC lấy M sao cho KM không song song với BD. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ với $mp(HKM)$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$, M, N lần lượt là hai điểm trên BC, CD sao cho MN không song song BD. E là điểm bất kỳ trong tam giác ABD. Xác định thiết diện của hình chóp $ABCD$ cắt bởi $mp(EMN)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, M là trung điểm của SA, N, P lần lượt là trọng tâm tam giác SBC và tam giác ADC. Xác định thiết diện cắt hình chóp cắt bởi $mp(MNP)$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên các mặt bên (SAB), (SBC), (SDC) lấy các điểm M, N, P sao cho $mp(MNP)$ không song song với bất kỳ một cạnh nào của hình chóp. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(MNP)$ và biện luận nghiệm của bài toán.

Bài tập tổng hợp

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD, I là trung điểm của SG. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(MNI)$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, tứ giác $ABCD$ có AB không song song với CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là trung điểm của SG. Xác định thiết diện vủa hình chóp cắt bởi $mp(CID)$.

Dạng 4. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng đồng qui và 3 đường thẳng đồng qui

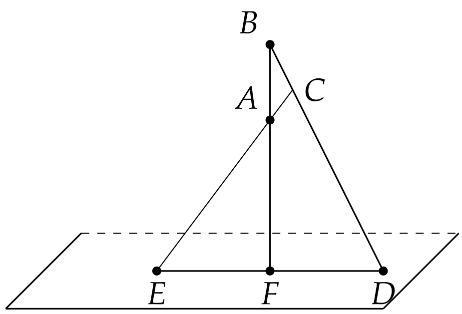
- **Chứng minh ba điểm thẳng hàng:** Ta chứng minh ba điểm đó cùng thuộc 2 mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng phải cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt, tức là thẳng hàng.
- **Chứng minh ba đường đồng qui:** Giả sử cần chứng minh AB, CD, MN đồng qui. Ta tìm K là giao của AB và CD, sau đó chứng minh K, M, N thẳng hàng.

VÍ DỤ MẪU DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (α) và ba điểm A, B, C không thẳng hàng nằm ngoài mặt phẳng (α). Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt (α) tại D, E, F. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} E, F, D \in (ABC) \\ E, F, D \in (\alpha) \end{cases}$, suy ra E, F, D thuộc giao tuyến của (ABC) và (α). Vậy E, F, D thẳng hàng.



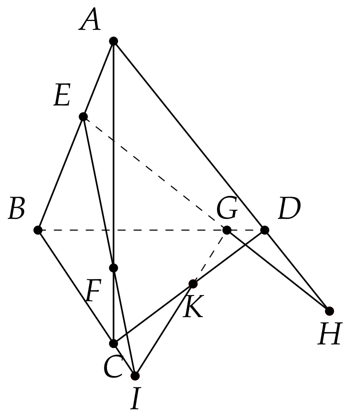
□

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho tam giác BCD, A là một điểm không thuộc (α). Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng qui.

Lời giải.

Trong (BCD) đặt $CD \cap IG = K$.

Ta có $\begin{cases} F, K, H \in (ACD) \\ F, K, H \in (EIG) \end{cases}$, suy ra F, K, H thẳng hàng. Vậy FH, CD, IG đồng qui tại K.



□

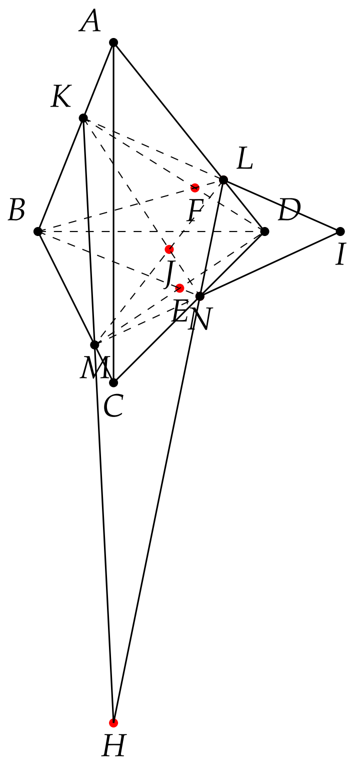
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là điểm nằm trên đường thẳng BD nhưng ngoài đoạn BD. Trong mặt phẳng (ABD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn AB và AD lần lượt tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn CB và CD lần lượt tại M và N.

1. Gọi $E = BN \cap DM$; $F = BL \cap DK$ và $J = LM \cap KN$. Chứng minh rằng ba điểm A, J, E thẳng hàng và ba điểm C, J, F cũng thẳng hàng.
2. Giả sử hai đường thẳng KMvà LN cắt nhau tại H, chứng minh rằng điểm H nằm trên đường thẳng AC.

Lời giải.

1. Ta có $\begin{cases} A, J, E \in (ABN) \\ A, J, E \in (AND) \end{cases}$, suy ra A, J, E thẳng hàng.

   Ta có $\begin{cases} C, J, F \in (CDK) \\ C, J, F \in (CBL) \end{cases}$, suy ra C, J, F thẳng hàng.
2. Ta chứng minh H, A, C thẳng hàng. Thật vậy, ta có $\begin{cases} H, A, C \in (ABC) \\ H, A, C \in (ACD) \end{cases}$, suy ra H, A, C thẳng hàng. Vậy $H \in AC$.



□

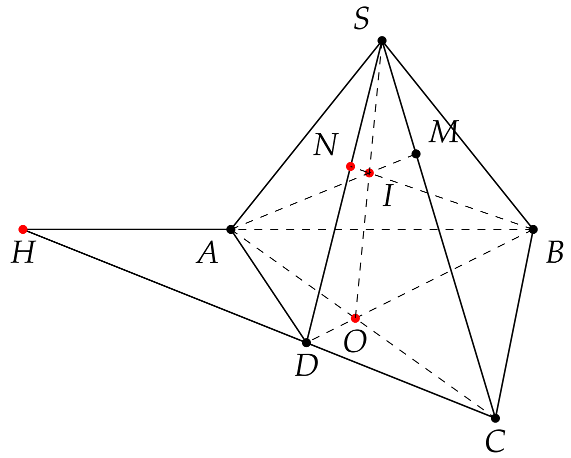
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ sao cho $ABCD$ không phải là hình thang, $AC \cap BD = O$.Trên cạnh SC lấy một điểm M.

1. Tìm giao điểm N của đường thẳng SD với (AMB).
2. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CD, MN đồng qui.

Lời giải.

1. Trong $(SAC) : SO \cap AM = I$. $(SBD) : BI \cap SD = N$. DO $BI \subset (AMB)$ nên $SD \cap (AMB) = N$.

2. Gọi H là giao của AB và CD.
Ta có, $\begin{cases} H, M, N \in (AMB) \\ H, M, N \in (SCD) \end{cases}$, suy ra $H \in MN$. Vậy AB, CD, MN đồng qui.



□

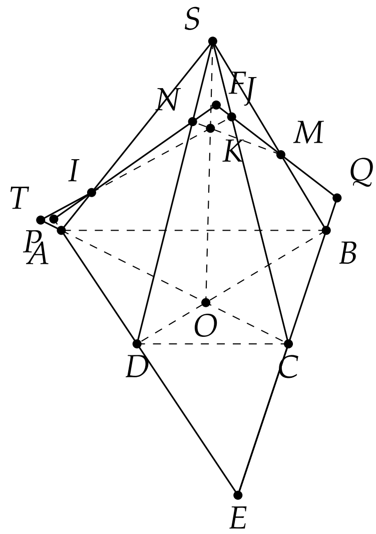
Ví dụ 5. Trong mặt phẳng (α), cho tứ giác $ABCD$, S là một điểm không thuộc (α). Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA và SC với $SI > IA$ và $SJ < JC$. Một mặt phẳng (β) qua IJ cắt SB tại M, SD tại N.

1. Chứng minh rằng IJ, MN, SO đồng qui (với O là giao điểm của AC và BD). Từ đó suy ra cách dựng điểm N khi biết điểm M.

2. AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. Chứng minh rằng S, F, E thẳng hàng.

3. IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (α) di động.

Lời giải.



1. Giả sử $IJ \cap SO = K$.
   Ta có $\begin{cases} K \in IJ \subset (\beta) \Rightarrow K \in (\beta), \\ K \in SO \subset (SBD) \Rightarrow K \in (SBD) \end{cases}$.
   Suy ra $O_1 \in (\beta) \cap (SBD) = MN$. Vậy IJ, MN, SO đồng qui tại K.
   Như vậy khi biết điểm M ta chỉ cần nối MK cắt SD tại N.

2. Ta thấy $(SAD) \cap (SBC) = \{S, E, F\}$ suy ra S, E, F thẳng hàng.

3. Do IJ không song song với AC nên $IJ \cap AC = K$ là một điểm cố định.
   Ta thấy, $(\beta) \cap (ABCD) = \{K, P, Q\}$, suy ra K, P, Q thẳng hàng. Vậy PQ luôn đi qua K cố định.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M, N và B. Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA, DC với (P). Chứng minh rằng E, B, Fthẳng hàng.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AC, AD sao cho $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{1}{2}$. Gọi $I = MN \cap BC$ và $J = MP \cap BD$.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng MG, PI, NJ đồng phẳng.
2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của CD và NI; $H = MG \cap BE$; $K = GF \cap (BCD)$, chứng minh rằng các điểm H, K, I, J thẳng hàng.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có D, E lần lượt là trung điểm của AC, BC. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (β) qua BC cắt SD, SA lần lượt tại P, Q.

1. Gọi I là giao của AM và DN, J là giao của BP và EQ. Chứng minh S, I, J, G thẳng hàng.
2. Gọi K là giao của AN và DM, L là giao của BQ và EP. Chứng minh S, K, L thẳng hàng.

Bài 4. Cho chóp $S.ABCD$ có AB không song song với CD. Lấy M là trung điểm SC.

1. Tìm giao điểm N của SD và (ABM).
2. Gọi O là giao của AC và BD. Chứng minh SO, AM, BN đồng qui.

Bài 5. Cho chóp $S.ABCD$ có AB cắt CD tại E và I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Lấy N tùy ý trên SD.

① Tìm giao điểm M của SC và (IJN).

② Chứng minh IM, JN, SO đồng qui, với $O = AC \cap BD$.

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC.Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng qui.

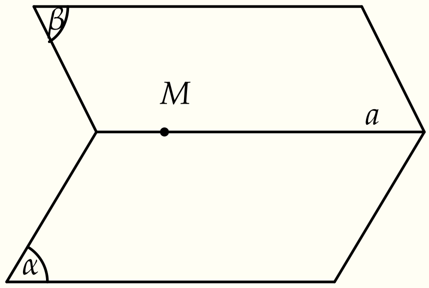
Dạng 5. Bài toán cố định

① **Chứng minh một đường thẳng qua một điểm cố định**
Trong không gian muốn chứng minh một đường thẳng a luôn qua một điểm cố định M, đầu tiên ta dự đoán điểm cố định, sau đó ta chuyển về bài toán chứng minh các điểm thẳng hàng. Thông thường ta tìm 2 mặt phẳng sao cho chúng có giao tuyến a và điểm M cũng nằm trên 2 mặt này.

Tìm mặt (α) và (β) sao cho

- ☑ $M \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- ☑ $a = (\alpha) \cap (\beta)$.

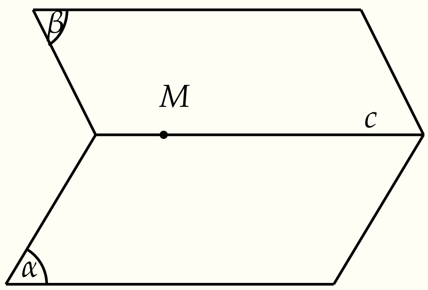
$\Rightarrow$ M nằm trên a hay a luôn đi qua điểm M cố định.



② **Chứng minh một điểm thuộc đường thẳng cố định**
Trong không gian muốn chứng minh một điểm M thuộc một đường thẳng cố định ta chứng minh điểm đó thuộc 2 mặt phẳng cố định, khi đó M nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

- ☑ (α) và (β) cố định.
- ☑ $M \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- ☑ $c = (\alpha) \cap (\beta)$, khi đó c cố định.

$\Rightarrow$ M nằm trên c.

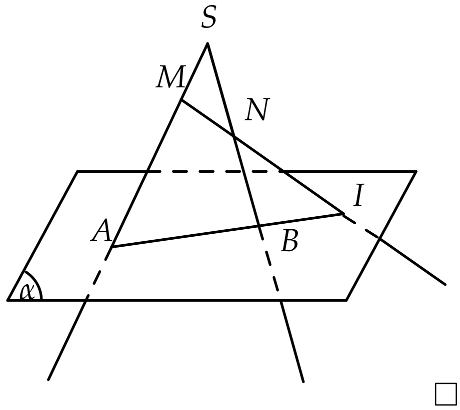


VÍ DỤ MẪU DẠNG 5

Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (α) và hai điểm M, N nằm ngoài (α), MN luôn cắt (α). S là một điểm thay đổi trong không gian sao cho SM, SN cắt (α) lần lượt tại A, B. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của MN và (α)
$\Rightarrow I \in (SMN) \cap (\alpha)$.
Mà $AB = (SMN) \cap (\alpha)$.
$\Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng AB.
Do MN cố định và (α) cố định nên I cố định.
Vậy AB luôn đi qua điểm cố định I.



□

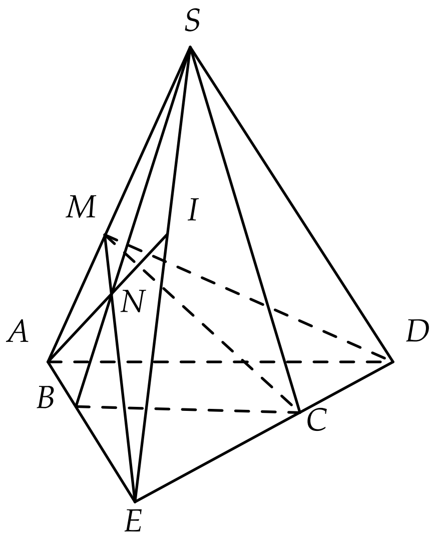
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đường thẳng AB cắt đường thẳng CD. Điểm M thay đổi trên SA. Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại N.

1. Chứng minh MN luôn đi qua điểm cố định.
2. Chứng minh giao điểm của AN và (SCD) thuộc đường thẳng cố định.

Lời giải.

1. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E là giao điểm của AB và CD.
Khi đó $(MCD) \equiv (MED)$.
Mà (CDM) cắt SB tại N
$\Rightarrow N$ là giao điểm của ME và SB
$\Rightarrow M$, N, E thẳng hàng hay MN luôn đi qua điểm cố định E.

2. Trong mặt phẳng (SAE) gọi $I = AN \cap SE$
$\Rightarrow I \in AN \cap (SCD)$.
Mà SE là cố định $\Rightarrow$ I luôn nằm đường thẳng cố định qua SE.

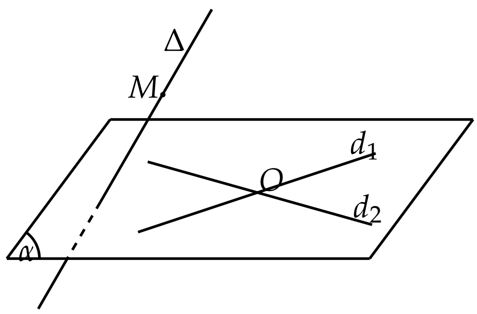


□

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O và một đường thẳng Δ không qua O sao cho d_1 và Δ chéo nhau, d_2 và Δ chéo nhau. Điểm M thay đổi trên Δ. Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (M, d_1) và (M, d_2) thuộc một mặt phẳng cố định.

Lời giải.

Ta có : $O \in d_1 \cap d_2 \Rightarrow O \in (M, d_1) \cap (M, d_2)$.
Mà $M \in (M, d_1) \cap (M, d_2)$
$\Rightarrow MO = (M, d_1) \cap (M, d_2)$.
Ta thấy MO luôn nằm trên mặt phẳng (O, Δ) cố định.
Vậy giao tuyến MO của hai mặt phẳng (M, d_1) và (M, d_2) luôn thuộc mặt phẳng (O, Δ) cố định.



□

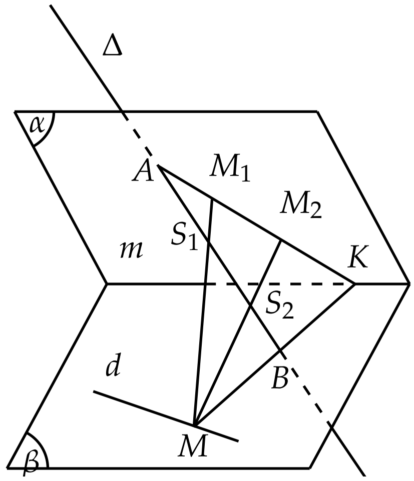
Ví dụ 4. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến m. Đường thẳng Δ cắt (α) tại A, (β) tại B. Trên Δ lấy hai điểm phân biệt S_1, S_2 cố định. Điểm M thay đổi trên (β) sao cho MS_1, MS_2 cắt (α) tại M_1, M_2.

① Chứng minh M_1M_2 đi qua một điểm cố định.

② Giả sử M_1M_2 cắt m ở K. Chứng minh K, B, M thẳng hàng.

③ M thay đổi trên đường thẳng d cố định thuộc (β) (d cắt m và không đi qua B). Chứng minh M_1, M_2 thuộc những đường thẳng cố định.

Lời giải.



① Ta có: $A \in \Delta \cap (\alpha)$; Δ và (α) cố định nên A cố định.
Mà $M_1M_2 = (MS_1S_2) \cap (\alpha)$
$\Rightarrow$ A nằm trên đường thẳng qua M_1M_2 hay M_1M_2 luôn đi qua điểm cố định A.

② Ta có: $MB = (MS_1S_2) \cap (\beta)$.
Mà $K \in M_1M_2 \cap m$
$\Rightarrow K \in (MS_1S_2) \cap (\beta)$
$\Rightarrow$ K nằm trên đường thẳng qua M, B hay K, B, M thẳng hàng.

③ Ta có $M_1 \in S_1M \cap (\alpha) \Rightarrow M_1 \in (S_1, d) \cap (\alpha)$
$\Rightarrow M_1$ thuộc giao tuyến Δ_1 của $(S_1, d) \cap (\alpha)$.
Ta có $M_2 \in S_2M \cap (\alpha) \Rightarrow M_2 \in (S_2, d) \cap (\alpha)$
$\Rightarrow M_2$ thuộc giao tuyến Δ_2 của $(S_1, d) \cap (\alpha)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng a, b cố định. Đường thẳng c cố định, không thuộc mặt phẳng (α) và cắt mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) thay đổi, chứa c cắt a và b lần lượt tại A và B. Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O. A, B là hai điểm cố định nằm ngoài (α) sao cho AB cắt (α). Mặt phẳng (β) di động chứa AB và luôn cắt d_1, d_2 tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định.

Bài 3. Cho hai điểm A, B cố định nằm về hai phía của mặt phẳng (α) cố định. Gọi M là một điểm chuyển động bất kì trong không gian, M không nằm trên đường thẳng qua AB. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng MA và MB cắt (P) tại hai điểm phân biệt P, Q thì đường thẳng PQ qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N nằm trên cạnh AB và AC sao cho $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho mặt phẳng (α) và tam giác ABC không nằm trên (α) và các đường thẳng AB, BC, CA cắt (α). Điểm M thay đổi trong không gian sao cho MA, MB, MC cắt mặt phẳng (α) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ đi qua một điểm cố định.

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt thuộc BC, CD sao cho MN không song song BD. Mặt phẳng (α) thay đổi qua MN và cắt AB, CD lần lượt tại P, Q. Giả sử MQ cắt NP tại I, MP cắt NQ tại J. Chứng minh rằng

1. J thuộc một đường thẳng cố định.
2. I thuộc một đường thẳng cố định.
3. PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 7. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (đáy lớn AB). Lấy M di động trên SC. Gọi I là giao điểm của BM và (SAD), N là giao điểm của SD và (ABM), J là giao điểm của AM và BN

1. Chứng minh I luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.
2. Chứng minh J luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.
3. Chứng minh IJ luôn đi qua 1 điểm cố định.

Bài 8. Cho tam giác ABC và hai tia song song cùng chiều Ax và By không thuộc mặt phẳng (ABC). Các điểm M và N thay đổi lần lượt trên Ax, By sao cho $AM = 2BN$. Chứng minh rằng

1. Mặt phẳng (CMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.
2. Trọng tâm G của tam giác CMN thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 9. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O. Hai điểm cố định A và B sao cho đường thẳng AB không đi qua O và cắt mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) thay đổi qua A và B cắt d tại M, d' tại N. Chứng minh rằng

1. MN luôn đi qua một điểm cố định.
2. Giao điểm I của AN với BM thuộc một đường thẳng cố định.
3. Giao điểm J của AM và BN thuộc một đường thẳng cố định.
4. Đường thẳng IJ luôn song song với một đường thẳng cố định hoặc đi qua một điểm cố định.

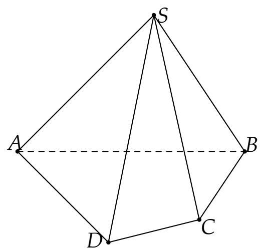
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Bốn điểm nào cũng không đồng phẳng.
B. Có nhiều nhất ba điểm không đồng phẳng.
C. Có ít nhất bốn điểm không đồng phẳng.
D. Ba điểm nào cũng không đồng phẳng.

Câu 2.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác không có cặp cạnh nào song song. Gọi O, E, F lần lượt là giao điểm của AC và BD, AD và BC, AB và CD. Hỏi giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng nào dưới đây?

A. SF. **B.** SE. **C.** SO. **D.** AB.

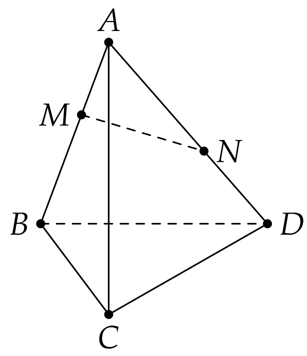


Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có điểm O là giao điểm của hai đường chéo của đáy. Giao điểm của đường thẳng AC với mặt phẳng (SBD) là điểm nào?

A. Điểm S. **B.** Điểm A. **C.** Điểm B. **D.** Điểm O.

Câu 4.
Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N nằm trên các cạnh AB, AD (như hình vẽ bên). Đường thẳng MN **không** cắt mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. (ABD). **B.** (ABC).
C. (BCD). **D.** (ACD).

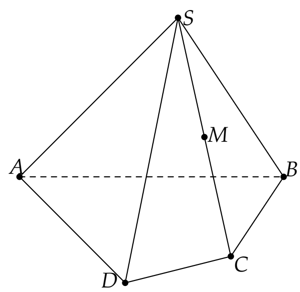


Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, gọi $O = AC \cap BD$, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (MBD).

A. SM. **B.** MB. **C.** OM. **D.** SD.

Câu 6.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác không có cặp cạnh nào song song. Gọi $O = AC \cap BD$, $E = AD \cap BC$, $F = AB \cap CD$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $(SAD) \cap (SBC) = SE$. **B.** $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
C. $(SAB) \cap (SCD) = SF$. **D.** $(ACM) \cap (SEO) = \varnothing$.



Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $O = AC \cap BD$, $E = AB \cap CD$ và $F = AD \cap BC$. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CD \cap (SAB) = F$. **B.** $AB \cap (SCD) = E$. **C.** $AD \cap (SBC) = F$. **D.** $AC \cap (SBD) = O$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO, (M không trùng với A và O). Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với mặt phẳng (ABC).

A. PN với $P = DC \cap AN, N = DO \cap BC$. **B.** PC với $P = DM \cap AN, N = DO \cap BC$.
C. PC với $P = DM \cap AB, N = DO \cap BC$. **D.** PC với $P = DM \cap AC, N = DO \cap BC$.

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$ nằm trong mặt phẳng (α) với E là giao điểm của AB và CD. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm đoạn SA. Tìm giao điểm N của đường thẳng SB và mặt phẳng (MCD).

A. $N = SB \cap ME$. **B.** $N \equiv E$. **C.** $N = SB \cap MC$. **D.** $N = SB \cap MD$.

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có AB và CD không song song và P là một điểm trên cạnh SD, P không trùng với S và D. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 11. Cho năm điểm phân biệt trong đó không có bốn điểm nào đồng phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong năm điểm trên?

A. 10. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 12. Cho đường thẳng $a \subset (P)$ và đường thẳng b cắt a tại M. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \parallel a$. **B.** $b \cap (P) = \varnothing$.
C. Nếu $b \not\subset (P)$ thì $b \cap (P) = M$. **D.** (P) là mặt phẳng duy nhất chứa a và b.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của BC, CD và SB. Tìm giao điểm I của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAK).

A. $I = MN \cap AK$. **B.** $I = MN \cap SK$. **C.** $I = MN \cap AD$. **D.** $I = MN \cap AB$.

Câu 14. Trong mặt phẳng (α), cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, S là một điểm không thuộc (α). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và SO. Đường thẳng MN cắt AB, AD và AC tại M_1, N_1 và O_1. Nối O_1P cắt SA tại P_1, nối M_1P_1 cắt SB tại M_2, nối N_1P_1 cắt SD tại N_2. Tìm giao tuyến của (MNP) với (SCD).

A. P_1N. **B.** NN_2. **C.** MN_2. **D.** P_1N_1.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh SC và SD. Đường thẳng SO cắt đường thẳng AM và BN lần lượt tại P và Q. Giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD) là điểm nào sau đây?

A. Điểm P. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm O. **D.** Điểm M.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, G là trọng tâm tam giác BCD. Tìm giao điểm E của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC).

A. $E \equiv C$. **B.** $E = MG \cap AN$. **C.** $E \equiv N$. **D.** $E = MG \cap BC$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO (M, N, P không trùng với các đỉnh). Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Tứ giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Tam giác. **D.** Lục giác.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Lấy E thuộc đoạn OC (E khác O, C), M thuộc đoạn SA (M khác S, A). Biết SB cắt mặt phẳng (MED) tại N. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Ba điểm D, N, H thẳng hàng với H là giao điểm của ME và SO.

B. Hai đường thẳng SO và DN không đồng phẳng.

C. Điểm N nằm ngoài đoạn SB.

D. Bốn điểm B, N, O, E đồng phẳng.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BD của tam giác ABD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho MN cắt AB tại H. Với mỗi điểm K thay đổi thuộc đoạn CN ta xác định giao điểm I của đường thẳng MK với mặt phẳng (ABC). Điểm I luôn thuộc đường thẳng nào khi K thay đổi trên đoạn CN?

A. Đường thẳng CH. **B.** Đường thẳng CN. **C.** Đường thẳng BC. **D.** Đường thẳng BH.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, N thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BN$, M thuộc đoạn SD sao cho $SD = 3MD$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNG) là hình gì?

A. Tứ giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Tam giác. **D.** Lục giác.

ĐÁP ÁN

1 C	**3** D	**5** C	**7** A	**9** A	**11** A	**13** D	**15** A	**17** B	**19** A
2 C	**4** A	**6** D	**8** B	**10** B	**12** C	**14** B	**16** B	**18** A	**20** B